

TD 8 : Généralités sur les fonctions Indication

—— Parité, périodicité, sens de variation, etc. ——

1 ★★ Vrai ou faux ? Justifier.

- 1) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire, alors f est continue en 0.
- 2) Toute fonction croissante est ou bien strictement croissante, ou bien constante.
- 3) On peut trouver des fonctions majorées qui n'admettent pas de maximum.
- 4) La somme de deux fonctions monotones est une fonction monotone.
- 5) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
- 6) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ est minorée sur $\mathbb{R}_+$.
- 7) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Essayer de chercher des contre-exemples. Si vous n'en trouvez pas, cette recherche préliminaire donne en général une idée de preuve rigoureuse.

2 ★★ Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-5}} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{3x-1}{x-5}}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\tan x}{x^3 + 2x^2 + x} \quad f_4 : x \mapsto \ln(\sin x)$$

Ce n'est pas trop compliqué, il faut juste prendre son temps pour justifier sans se tromper.

3 ★★ Soit $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

- 1) $g : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$
- 2) $h : x \mapsto f(\sin x)$
- 3) $u : x \mapsto f(\sqrt{x})$
- 4) $v : x \mapsto f(2\cos x)$

Ce n'est pas trop compliqué, il faut juste prendre son temps pour justifier sans se tromper.

4 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Soit f une fonction paire. Quelle est la parité de la fonction f^n ?
- 2) Même question si f est impaire.

Utiliser la définition de la parité et de $f^n = \underbrace{f \times \dots \times f}_{n \text{ fois}}$.

5 ★★ Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ?

- 1) $f(x) = \sin^2(x)$
- 2) $f(x) = \sin(x^2)$
- 3) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
- 4) $f(x) = \tan(x) \sin(x)$

Pour justifier la (non-)parité, prendre la (négation de la) définition.

Idem pour la périodicité.

6 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- 1) On suppose que f est impaire et positive. Montrer que f est nulle.
- 2) On suppose que f est paire et croissante. Montrer que f est constante.
- 3) On suppose que f est périodique et croissante. Montrer que f est constante.

Passer par l'absurde en supposant que f n'est pas nulle / constante.

7 ★★★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout réel c , on note $f_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_c(x) = f(x+c)$.

- 1) Par quelle transformation obtient-on le graphe de f_c à partir du graphe de f ?
- 2) On suppose qu'il existe des réels a et b tels que f_a est paire et f_b est impaire. Montrer que f est périodique.

Un exercice dont la q. 2) est très difficile ! Pour l'attaquer, il est souvent utile de "réduire" le nombre d'inconnues, ici a et b , en reformulant le problème. Par exemple :

On pose $g = f_a$ qui est paire et, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on définit $g_c : x \mapsto g(x+c)$. On remarque que pour tout

$x \in \mathbb{R}$,

$$g_{b-a}(x) = g(x+b-a) = f_a(x+b-a) = f(x+b) = f_b(x)$$

et donc en posant $c = b - a$, on en déduit que g_c est impaire.

Ainsi, on peut reformuler la q. 2) ainsi : étant donné une fonction paire g , on suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que g_c est impaire. Montrer que g est périodique (ce qui entraînera que f l'est).

Ce dernier problème est plus facile à traiter. À vous de jouer !

———— Dérivabilité et études de fonctions ————

8 ★★ Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $f : x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$ | 5) $f : x \mapsto x+6 $ |
| 2) $f : x \mapsto (x^4+1)^5$ | 6) $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^3}$ |
| 3) $f : x \mapsto \sqrt{3x-4}$ | |
| 4) $f : x \mapsto 1 - \ln(5x-1)$ | 7) $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ |

Utiliser les formules classiques. Attention, les écritures du type " $(\sqrt{3x-4})'$ " sont à bannir de la copie, ne les faites qu'au brouillon !

9 ★★ Par une étude de fonction, démontrer les assertions suivantes :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$
- 2) $\forall x > -1 \quad \ln(1+x) \leq x$
- 3) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$

Reformuler chaque problème en $f(x) \geq 0$ avec f une fonction et pour tout x dans un intervalle donné.

10 ★★ On pose $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- 1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée (sur $\mathbb{R}^*$).
- 2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
- 3) Est-ce que f' est continue ?

Il s'agit d'une application des définitions.

11 ★★ Étudier puis tracer les fonctions suivantes. On veillera, si possible, à bien réduire l'intervalle d'étude.

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| 1) $f : x \mapsto \frac{1}{\tan x}$ | 2) $g : x \mapsto x \ln x $ |
|-------------------------------------|------------------------------|

Une simple étude de fonctions !

12 ★★★ (Lemme de Gronwall) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, dérivable, qui vérifie $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \leq f(x)$$

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Étudier la fonction $g : x \mapsto e^{-x}f(x)$

13 ★★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes pour lesquelles $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Cette relation entraîne que f est bijective et que $f^{-1} = f$. En particulier, f et f^{-1} ont le même graphe. Or, on sait que le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie du graphe de f selon la droite $y = x$. Cela conduit à penser que f est nécessairement égale à l'identité de $\mathbb{R}$.

Mais ce n'est pas une preuve ! Donc, supposer par l'absurde que f n'est pas égale à $\text{id}_{\mathbb{R}}$ et en déduire une contradiction !